Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
2^{do} Examen Parcial (36 %)
Ene-Mar 2018

Turno 7-8
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (4 ptos.) Halle el dominio de definición de la función $f(x) = \ln\Big(\big(x^2-2\big)\ln(x)\Big)$

Solución: Como el dominio de la función logaritmo es $(0,\infty)$, queremos encontrar cuáles valores de $x\in\mathbb{R}$ son tales que $\big(x^2-2\big)\ln(x) > 0$. Notemos que esta última expresión sólo tiene sentido para $x > 0$. Haciendo análisis de signos

	0	1	$\sqrt{2}$
x^2-2	$-$	$-$	$+$
$\ln(x)$	$-$	$+$	$+$

tenemos que el dominio de la función $f(x)$ es $(0,1)\cup(\sqrt{2},\infty)$.

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6(x)\cos^5(x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^6(x)\cos^5(x)\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{sen}^6(x)\cos^4(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \operatorname{sen}^6(x)\,\big(\cos^2(x)\big)^2\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \operatorname{sen}^6(x)\,\big(1-\operatorname{sen}^2(x)\big)^2\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \Big(\operatorname{sen}^6(x) - 2\operatorname{sen}^8(x) + \operatorname{sen}^{10}(x)\Big)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7(x) - \frac{2}{9}\operatorname{sen}^9(x) + \frac{1}{11}\operatorname{sen}^{11}(x) + C
\end{aligned}$$

para cualquier valor de $C\in\mathbb{R}$.

Pregunta 3. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\qquad\qquad\quad x = 2\operatorname{sen}(t)\\
&\qquad\qquad\quad \mathrm{d}x = 2\cos(t)\,\mathrm{d}t\\
\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} &\overset{\downarrow}{=} \int \frac{4\operatorname{sen}^2(t)\,2\cos(t)}{\sqrt{4\big(1-\operatorname{sen}^2(t)\big)}}\,\mathrm{d}t = 4\int \operatorname{sen}^2(t)\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int \big(1-\cos(2t)\big)\,\mathrm{d}t = 2t - \operatorname{sen}(2t) + C\\
&= 2t - 2\operatorname{sen}(t)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)} + C\\
&= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C
\end{aligned}$$

para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$.

Pregunta 4. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}\\
&= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + K
\end{aligned}$$

para cualquier valor de $K \in \mathbb{R}$, ya que

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

vale para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ si, y sólo si, $A = 2$, $B = 0$ y $C = 3$.

Pregunta 5. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$

Solución: Integrando por partes se tiene,

$$\int x^3 \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)=x^3 \qquad f'(x)=3x^2 \\ g'(x)=\operatorname{sen}(x) \qquad g(x)=-\cos(x)}}{=} -x^3\cos(x) + 3\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f(x)=x^2 \qquad f'(x)=2x \\ g'(x)=\cos(x) \qquad g(x)=\operatorname{sen}(x)}}{=} -x^3\cos(x) + 3\left(x^2\operatorname{sen}(x) - 2\int x\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f(x)=x \qquad f'(x)=1 \\ g'(x)=\operatorname{sen}(x) \qquad g(x)=-\cos(x)}}{=} -x^3\cos(x) + 3x^2\operatorname{sen}(x) - 6\left(-x\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -x^3\cos(x) + 3x^2\operatorname{sen}(x) + 6x\cos(x) - 6\operatorname{sen}(x) + C$$

para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$.